

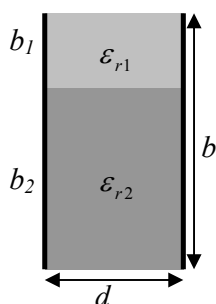
19. REPUBLIČKO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
REPUBLIKE SRPSKE (Bijeljina, 12. maj 2012)

III RAZRED

1. Одредити висину h изнад пола Земљине кугле на којој убрзање слободног пада има исту вриједност као на површини екватора. Полупречник Земље је $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ а маса Земље $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. При рачунању не узимати у обзир спљоштеност земље. Гравитациона константа износи $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. (20 бодова)

2. Плоче равног кондензатора имају димензије a и b , а њихово међусобно растојање је d . Између плоча су постављена два диелектрика релативних диелектричних константи ε_{r1} и ε_{r2} на дужинама b_1 и b_2 , као што је приказано на слици 1. Одредити:

а) јачине електричног поља у диелектрицима,

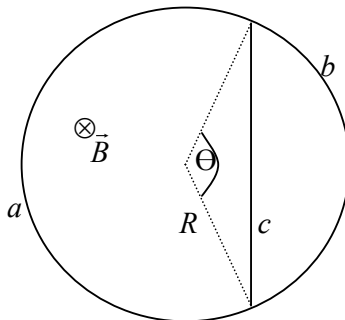


Слика 1.

- б) површинску густину слободних наелектрисања и индукцију електричног поља,
в) интензитет вектора поларизације и површинску густину везаних наелектрисања непосредно уз облоге,
г) напон између плоча кондензатора,
д) капацитет кондензатора.
Количина електрицитета којом је кондензатор наелектрисан износи q .

(15 бодова)

3. Раван проводне конфигурације приказане на слици 2. окомита је на силнице магнетног поља чија се индукција мијења по закону $B=kt$, гдје је k - константа. Ако је познат полупречник R и угао Θ одредити јачину струје у грани a као и разлику потенцијала између крајева те гране. Отпор по јединици дужине свих проводника износи r_0 .



Слика 2.

(25 бодова)

4. Четири куглице су повезане нерастегљивим концима једнаке дужине и налазе се на тјеменима квадрата. Када куглице на два наспрамна тјемена наелектришемо количинама електрицитета Q , а остала два наелектрисања-количинама електрицитета q , оне се помјере док се не зауставе у положајима равнотеже на тјеменима ромба. Колики угао заклапају конци на тјеменима гдје се налазе наелектрисања q ? (25 бодова)

5. Коло наизмјеничне струје се састоји из редно везаног калема коефицијента самоиндукције $0,2 \text{ H}$, чији је отпор 4Ω , и кондензатора капацитета $5 \cdot 10^{-5} \text{ F}$. Ово коло је прикључено на електрични извор наизмјеничне струје чији је ефективни напон 220 V . Колика је ефективна вриједност наизмјеничне струје у овом колу ако је њена фреквенција 100 Hz ? Колика би требала да буде фреквенција наизмјеничне струје да би у колу наступила резонанција? Колика је јачина струје у колу при резонанцији и колики су тада напони на калему и кондензатору? (15 бодова)

RJEŠENJA ZADATAKA ZA III RAZRED

1. На површини екватора убрзање силе теже g_e једнако је разлици „нормалне“ вриједности $g = G \frac{m_Z}{R_Z^2}$ и убрзања изазваног окретањем Земље око своје осе

$$a = \frac{4\pi^2}{T_Z^2} R_Z, \text{ гдје је период окретања Земље око своје осе 24 сата. Како је}$$

$$g_e = g - a \Rightarrow g_e = G \frac{m_Z}{R_Z^2} - \frac{4\pi^2}{T_Z^2} R_Z. \quad (2.5 \text{ б})$$

На висини h изнад пола Земље, убрзање слободног пада одређено је изразом:

$$g_p = G \frac{m_Z}{(R_Z + h)^2}, \text{ из услова задатка } g_e = g_p$$

$$G \frac{m_Z}{R_Z^2} - \frac{4\pi^2}{T_Z^2} R_Z = G \frac{m_Z}{(R_Z + h)^2}. \quad (2.5 \text{ б})$$

Множењем горње једначине са $R_Z^2 (R_Z + h)^2$ добијамо

$$Gm_Z (R_Z + h)^2 - \frac{4\pi^2}{T_Z^2} R_Z^3 (R_Z + h)^2 = Gm_Z R_Z^2,$$

$$Gm_Z (h^2 + 2hR_Z) - \frac{4\pi^2}{T_Z^2} R_Z^3 (R_Z^2 + 2R_Z h + h^2) = 0,$$

$$h^2 + 2hR_Z - \frac{4\pi^2 R_Z^5}{Gm_Z T_Z^2 - 4\pi^2 R_Z^3} = 0 \quad (*). \quad (5 \text{ б})$$

Рјешење квадратне једначине (*) је

$$h = -R_Z \pm \sqrt{R_Z^2 + \frac{4\pi^2 R_Z^5}{Gm_Z T_Z^2 - 4\pi^2 R_Z^3}}. \quad (5 \text{ б})$$

Рјешење са негативним предзнаком испред другог члана на десној страни одбацујемо јер је $h > 0$. Имамо да је

$$h = R_Z \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 R_Z^3}{Gm_Z T_Z^2 - 4\pi^2 R_Z^3}} \right), \quad (3 \text{ б})$$

$$h = R_Z \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 R_Z^3}{Gm_Z T_Z^2}}} \right) = 11000 \text{ m}. \quad (2 \text{ б})$$

2. а) Укупна количина електрицитета на плочи кондензатора једнака је збиру количина електрицитета q_1 и q_2 које се налазе на дијеловима плоче уз одговарајуће диелектрике:

$$q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = D_1 S_1 + D_2 S_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E a b_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E a b_2,$$

одавде је

$$(4 \text{ б})$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} a b_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} a b_2}.$$

Јачина ел. поља у оба диелектрика има исту вриједност.

б) Површинске густине слободних наелектрисања једнаке су интензитетима вектора индукције електричног поља:

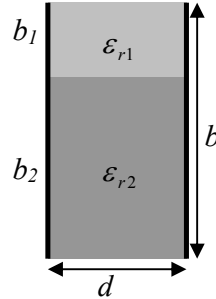
$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E = \frac{\varepsilon_{r1} q}{a(\varepsilon_{r1} b_1 + \varepsilon_{r2} b_2)}, \quad (3.5 \text{ б})$$

$$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E = \frac{\varepsilon_{r2} q}{a(\varepsilon_{r1} b_1 + \varepsilon_{r2} b_2)}.$$

в) Густина везаних наелектрисања једнака је по апсолутној вриједности интензитету вектора поларизације:

$$\sigma_{p1} = P_1 = \varepsilon_0 \chi_e E = \frac{(\varepsilon_{r1} - 1)q}{a(\varepsilon_{r1} b_1 + \varepsilon_{r2} b_2)},$$

$$\sigma_{p2} = P_2 = \frac{(\varepsilon_{r2} - 1)q}{a(\varepsilon_{r1} b_1 + \varepsilon_{r2} b_2)}. \quad (3.5 \text{ б})$$

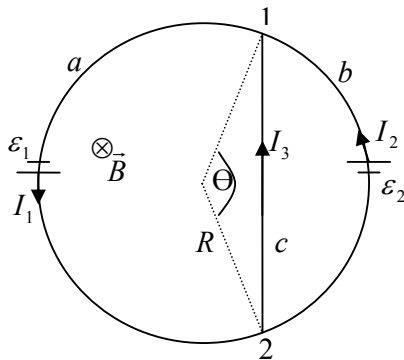


Слика 1.

$$\text{г) } U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} a b_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} a b_2}. \quad (2 \text{ б})$$

$$\text{д) } C = \frac{q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{a b_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{a b_2}{d}. \quad (2 \text{ б})$$

3. У проводницима се индукују електромоторне силе које имају такав смјер да се својом струјом супроставе узроку свог настанка (повећању флукса магнетног поља). Како силнице магнетног поља увиру у раван цртежа силнице које потичу од индуковане струје морају извирати из равни цртежа. Да би поље имало тај смјер струје у гранама a и b морају да имају смјерове као на слици 1.



Слика 2.

Разлика потенцијала између тачака 1 и 2 је

$$V_2 - V_1 = \varepsilon_1 - R_a I_1 = R_c I_3 = R_b I_2 - \varepsilon_2,$$

док је по 1. Кирхофовом правилу (5 б)

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Рјешавањем претходног система једначина добија се

$$I_1 = \frac{(R_b + R_c) \varepsilon_1 + R_c \varepsilon_2}{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}, \quad \text{гдје је} \quad (5 \text{ б})$$

$$R_a = l_a r_o = R r_o (2\pi - \theta), \quad (3 \text{ б})$$

$$R_b = l_b r_o = R r_o \theta, \quad (3 \text{ б})$$

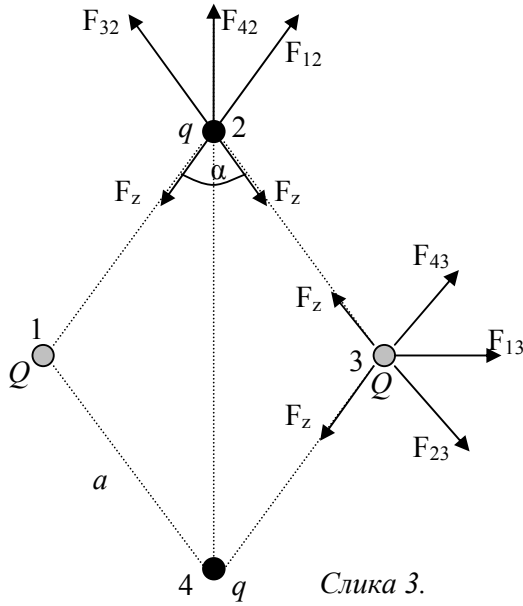
$$R_c = l_c r_o = 2 R r_o \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3 \text{ б})$$

$$\varepsilon_1 = S_{ac} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} R^2 (2\pi - \theta + \sin \theta) k, \quad (3 \text{ б})$$

$$\varepsilon_2 = S_{cb} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) k. \quad (3 \text{ б})$$

4. Услов равнотеже на наелектрисање 2 изражен преко пројекција на вертикалну осу и услов равнотеже на наелектрисање 3 изражен преко пројекција на хоризонталну осу дају :

Нормалне компоненте сила F_{32} и F_{12} се пониште, остају само паралелне



Слика 3.

$$F_{12par} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \cos \frac{\alpha}{2} = F_{32par}, \text{ док је}$$

$$F_{42} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(2a \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}. \quad (5\text{ б})$$

Нормалне компоненте сила затезања нити се пониште.

Паралелне компоненте сила F_{43} и F_{23} се пониште, остају само нормалне

$$F_{23norm.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \sin \frac{\alpha}{2} = F_{43norm}, \text{ док је}$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{\left(2a \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}. \quad (5\text{ б})$$

Паралелне компоненте сила затезања нити се пониште.

Услов равнотеже је онда:

$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(2a \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} = 2F_z \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (5\text{ б})$$

$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{\left(2a \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} = 2F_z \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5\text{ б})$$

Дјелењем претходних једначина и сређивањем добијамо да је $\alpha = 2 \arctg \left(\sqrt[3]{\left(\frac{Q}{q}\right)^2} \right)$.

(5 б)

5. Ефективна вриједност струје у колу је

$$I = \frac{U}{Z}, \quad (16)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \quad (16)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \quad (16)$$

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 \text{ Hz}$$

$$\Omega = 628 \text{ rads}^{-1}$$

$$Z = 93,835 \Omega. \quad (16)$$

$$I = 2,34 \text{ A} \quad (16)$$

У колу настаје резонанција када је струја у колу највећа, а то је онда када је импеданса најмања, тј. када је

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad (2\text{ б})$$

Резонантна фреквенција кола је

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (16)$$

$$\nu_0 = 50 \text{ Hz}$$

Јачина струје у колу је највећа при резонанцији, гдје је $Z = R$, и имамо:

$$I_{\max} = \frac{U}{R} \quad (16)$$

$$I_{\max} = \frac{220V}{4\Omega}$$

$$I_{\max} = 55 A$$

Напон на крајевима индуктивног калема је

$$U_L = Z_L \cdot I_{\max} = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot I_{\max} \quad (26)$$

Како је $L\omega \gg R$, онда је

$$U_L \approx L \cdot \omega \cdot I_{\max}$$

$$U_L \approx 0,2H \cdot 628 \text{ rads}^{-1} \cdot 55A \quad (26)$$

$$U_L \approx 2460 V$$

Напон на крајевима кондензатора је:

$$U_C = \frac{1}{C \cdot \omega} \cdot I_{\max} = L \cdot \omega \cdot I_{\max} \quad (26)$$

$$U_c = 2460 V.$$